25/02/19

Μεθοδολογία

Αρχή λ = μεταβλητή. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \exists u \neq \vec{0}$: $Au = \lambda_i u$
u: ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ του πίνακα A.

• Πρόβλημα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, εάν υπάρχουν και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ βαθμού n ως προς λ.
Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Στο $\mathbb{C}$ κάθε πολυώνυμο δίνεται σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων.

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a'_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a'_1\lambda + a'_0) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$\chi_A(0) = (-1)^n a'_0 = a_0 = (-1)^n(-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$$

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα A ισούται με την ορίζουσα του πίνακα A. Δηλαδή: $\boxed{\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A}$

http://www.tanenghong.com

No. Date

* **Απόδειξη:** Γνωρίζω ότι $\lambda_1 \cdots \lambda_n = a_0$ ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
$a_0 = X_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα A ισούται με το ίχνος του πίνακα A, δηλ. $\boxed{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = trA}$

* **Απόδειξη:** $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
$X_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a'_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a'_1\lambda + a'_0) =$
$= (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$
Ο συντελεστής του λ^{n-1} θα είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: Αν ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή το μηδέν, τότε η ορίζουσά του είναι 0. δηλ. $\lambda = 0 \Rightarrow \det A = 0$

* **Απόδειξη:** $X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
$X_A(0) = 0 \Rightarrow \det(A - 0 \cdot I) = 0 \Rightarrow \det A = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4: Έστω ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές τότε ο A αντιστρέφεται και ο A^k έχει ιδιοτιμή το λ^k αν ο A έχει ιδιοτιμή το λ για $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

* **Απόδειξη:** Όλες οι ιδιοτιμές είναι $\neq 0$. A αντιστρέφ. $\Leftrightarrow \det A \neq$
Αν $Au_i = \lambda u_i$ $u_i \neq \bar{0}$
$A(Au_i) = A_i(\lambda_i u_i) \Rightarrow A^2 u_i = \lambda_i A_i u_i \Rightarrow A^2 u_i = \lambda_i \lambda_i u_i \Rightarrow$
$\Rightarrow A^2 u_i = \lambda_i^2 u_i$. Με επαγωγή έχω ότι $\boxed{A^k u_i = \lambda_i^k u_i}$ $k = 1, 2, \ldots$
Για $k = -1, -2, \ldots$ $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$
$Au_i = \lambda_i u_i \Rightarrow A^{-1} A u_i = A^{-1}(\lambda_i u_i) \Rightarrow I u_i = \lambda_i A^{-1} u_i \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_i} u_i = \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i A^{-1} u_i \Rightarrow A^{-1} u_i = \frac{1}{\lambda_i} u_i = \lambda_i^{-1} u_i$
Με επαγωγή έχω ότι $A^{-k} u_i = \lambda_i^{-k} u_i$
Άρα τελικά ισχύει ο τύπος για $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

No. Date

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω ότι ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αν με S συμβολίσω τον πίνακα ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, τότε υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας Λ τέτοιος ώστε:

$$\boxed{S^{-1}AS = \Lambda \iff AS = S\Lambda}$$

* Απόδειξη: Έστω $\{u_1, \ldots, u_n\}$ τα γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα του A : $Au_i = \lambda u_i$

$S = (\underset{\text{στήλες}}{u_1, \ldots, u_n})$ $\quad \{u_1, \ldots, u_n\}$ γρ. ανεξ. $\Rightarrow$ ο S αντιστρέφεται $\operatorname{rank} S = n$.

$AS = A(u_1, \ldots, u_n) = (\underset{\text{στήλη}}{Au_1}, \ldots, Au_n) = (\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n) =$

$$= S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Άρα $AS = S\Lambda \iff S^{-1}AS = \Lambda \iff A = S\Lambda S^{-1}$

→ Ο S είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων στην κανονική βάση.

πχ: $\{(1,1,1), (0,2,1), (1,0,1)\} \to$ κανονική

$(1,1,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$

$(0,2,1) = 0\cdot e_1 + 2e_2 + 1\cdot e_3$

$(1,0,1) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας πίνακας A θα καλείται διαγωνοποιήσιμος αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

πχ: 1) Να βρεθεί πίνακας A διαγωνοποιήσιμος με n διαφορετικές ιδιοτιμές.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & 3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

http://www.tanenghong.com

No. Date

πχ. 2) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος με μόνο μία ιδιοτιμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$ ιδιοτιμή το 1, με πολλαπλότητα n.

$$\chi_I(\lambda) = (-1)^n (\lambda-1)^n$$

πχ. 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ να διαγωνοποιηθεί, δηλαδή να βρεθούν οι ιδιοτιμές κ' τα ιδιοδιανύσματα.

1ο Βήμα: $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)+1 =$

$= -2\lambda + \lambda^2 + 1 = (\lambda-1)^2$

Άρα ιδιοτιμή το $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα 2.

Ιδιοδιανύσματα:

$\lambda_1 = 1$: $(A - 1\cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

ιδιοδιάνυσμα $(x,y) = (x,x) = x(1,1)$ ιδιοδιάνυσμα: $u_1 = (1,1)$

Έχω μόνο ένα γρ. ανεξ. ιδιοδιάνυσμα, άρα ο A δεν διαγωνοποιείται.

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. ΔΔΣ: A όμοιος B $\Leftrightarrow \exists Q$ τ.ω. $A = QBQ^{-1}$

$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$

$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det(QBQ^{-1} - \lambda I) = \det(QBQ^{-1} - \lambda QIQ^{-1})$

$= \det[Q(BQ^{-1} - \lambda I Q^{-1})] = \det[Q(B-\lambda I)Q^{-1}] =$

$= \det Q \cdot \det(B-\lambda I) \cdot \det Q^{-1} =$

$= \det Q \cdot \det Q^{-1} \cdot \chi_B(\lambda) = \det(Q\cdot Q^{-1})\,\chi_B(\lambda) =$

$= \det I \cdot \chi_B(\lambda) = 1 \cdot \chi_B(\lambda) = \chi_B(\lambda)$.

No. Date

ΕΡΩΤΗΜΑ: $Au_1 = \lambda u_1$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow u_1$ γρ. ανεξ. u_2
$Au_2 = \lambda u_2$ ...

$u_1 \neq 2u_1 \Rightarrow Au_1 = \lambda_1 u \Rightarrow A\,2u_1 = \lambda_1 2u_1$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.

* **Απόδειξη:** Έστω $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές & u_1, u_2 ιδιοδιανύσματα.
$Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$
Υποθέτω ότι $a_1u_1 + a_2u_2 = \bar{0}$. Θέλω $a_1 = a_2 = 0$
$a_1u_1 + a_2u_2 = \bar{0} \Rightarrow a_1u_1 = -a_2u_2 \Rightarrow u_2 = -\frac{a_1}{a_2}u_1$ (1) $(a_2 \neq 0)$
$a_1u_1 + a_2u_2 = \bar{0} \Rightarrow A(a_1u_1 + a_2u_2) = A\bar{0}$ $\quad (a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0)$
$a_1Au_1 + a_2Au_2 = \bar{0} \Rightarrow a_1\lambda_1u_1 + a_2\lambda_2u_2 = \bar{0} \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow a_1\lambda_1u_1 - a_2\lambda_2\frac{a_1}{a_2}u_1 = \bar{0} \Rightarrow (a_1\lambda_1 - \lambda_2a_1)u_1 = \bar{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{\neq 0}{a_1}\underset{\neq 0}{(\lambda_1 - \lambda_2)}\underset{\neq 0}{u_1} = 0$ ΑΤΟΠΟ.

Άρα $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow u_1, u_2$ γραμ. ανεξ.
Με επαγωγή στο πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών θα δείξω το ζητούμενο.
Υπόθεση: Έχω $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ διαφορετικές ιδιοτιμές, και από την επαγωγή γνωρίζω ότι η πρόταση είναι αληθής για $k-1$ το πολύ ιδιοτιμές.
$Au_1 = \lambda_1u_1$, $Au_2 = \lambda_2u_2$, ..., $Au_k = \lambda_ku_k$ $\quad \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$
$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = \bar{0}$ (2) πρέπει νδο $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$
(2) $\Rightarrow$ Έστω ότι το $a_1 \neq 0$ αφού θα υπάρχει τουλάχιστον ένας συντελεστής $\neq 0$. Άρα $u_1 = -\frac{a_2}{a_1}u_2 - \frac{a_3}{a_1}u_3 - \cdots - \frac{a_k}{a_1}u_k$ (3)
(2) $\Rightarrow A(a_1u_1 + \cdots + a_ku_k) = A\bar{0} = \bar{0}$
$a_1Au_1 + \cdots + a_kAu_k = \bar{0} \Rightarrow a_1\lambda_1u_1 + \cdots + a_k\lambda_ku_k = \bar{0} \Rightarrow$
$\overset{(3)}{\Rightarrow} a_1\lambda_1\left(-\frac{a_2}{a_1}u_2 - \frac{a_3}{a_1}u_3 - \cdots - \frac{a_k}{a_1}u_k\right) + a_2\lambda_2u_2 + \cdots + a_k\lambda_ku_k = \bar{0}$
$a_2\underset{\neq 0}{(\lambda_2 - \lambda_1)}u_2 + a_3\underset{\neq 0}{(\lambda_3 - \lambda_1)}u_3 + \cdots + a_k\underset{\neq 0}{(\lambda_k - \lambda_1)} = \bar{0}$.
Από υπόθεση, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ γρ. ανεξ. Άρα οι συντελεστές είναι 0.
Άρα $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$. Από (3) $\Rightarrow a_1 = 0$. Άρα τα u_i είναι γραμ. ανεξ.